



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

05F

D

دوپینگ ماز

@Doping_Maze | @BioMazeFree

@Doping_Maze | @BioMazeFree

آزمون دوپینگ ماز - ۱۴۰۰/۰۲/۲۶

دفترچه پاسخ ریاضی

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

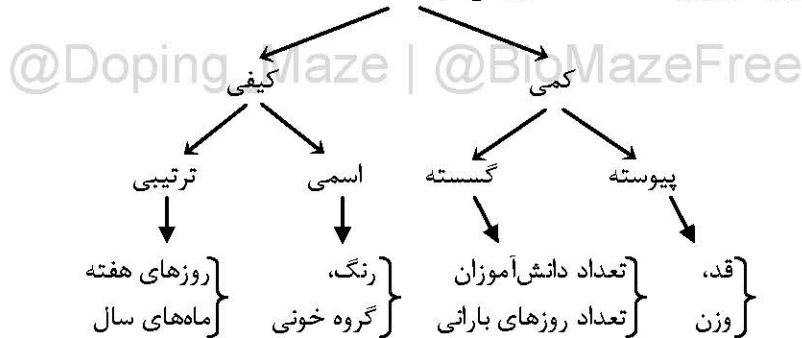
تعداد سؤال: ۳۰

طراح	ویراستار
نیما نیکنام	میلاد حسینی نامی
	ارسلان حسنوند
	مهدی حاجی نژادبان

- ۱- نوع بارندگی (برف یا باران) و میزان بارندگی بر حسب میلی متر به ترتیب از راست به چپ جزء کدام متغیرها می باشند؟
- (۱) کیفی ترتیبی و کمی پیوسته
(۲) کیفی اسمی و کمی پیوسته
(۳) کیفی ترتیبی و کمی گسسته
(۴) کیفی اسمی و کمی گسسته

پاسخ: گزینه ۲

متغیرهای آماری مطابق تقسیم بندی زیر به ۴ دسته تقسیم می شوند:



مثال:

- ۲- اگر میانگین داده های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر ۱۰ و میانگین داده های $y_1, y_2, \dots, y_n$ برابر ۸ باشد، میانگین داده های $x_1 + y_n, x_2 + y_{n-1}, \dots, x_n + y_1$ و داده های $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟
- (۱) ۹، ۱۸ (۲) ۱۸، ۹ (۳) ۹، ۹ (۴) ۱۸، ۱۸

پاسخ: گزینه ۱

اگر تعداد داده ها برابر باشد و آنها را با هم جمع کنیم، میانگین جمع آنها برابر مجموع میانگین هاست:

$$(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{x} + \bar{y}$$

پس میانگین مجموع برابر $10 + 8 = 18$ است.

و اگر دو دسته داده را که تعداد برابر دارند در یک دسته قرار دهیم، میانگین جدید برابر معدل میانگین های دو دسته است.

یعنی میانگین $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ برابر $\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}$

دقت کنید ترتیب جمع کردن در اولی تغییری در میانگین ایجاد نمی کند، یعنی میانگین $x_1 + y_n, x_2 + y_{n-1}, \dots, x_n + y_1$ با میانگین $x_1 + y_n, x_2 + y_{n-1}, \dots, x_n + y_1$ یکی است.

همین طور ترتیب نوشتن در دومی تغییری در میانگین ایجاد نمی کند، یعنی میانگین $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ با میانگین $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ یکی است.

- ۳- اگر واریانس داده های $x_1, x_2, \dots, x_7$ برابر صفر باشد و میانگین داده های $x_1, x_2, \dots, x_7, 5, 7, 8$ برابر ۹ باشد، میانگین $x_1, x_2, \dots, x_7$ چقدر است؟
- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

اگر یکی از پارامترهای پراکندگی صفر باشد، همه ی داده ها با هم برابرند. بنابراین:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_7 = x$$

از طرفی میانگین ده داده ی آماری $x_1, x_2, \dots, x_7, 5, 7, 8$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_7 + 5 + 7 + 8}{10} \Rightarrow 9 = \frac{7x + 20}{10} \Rightarrow x = 10$$

یعنی تمامی ۷ داده برابر ده هستند، بنابراین میانگین آنها هم برابر ده می باشد.



۴- اگر میانگین و انحراف معیار هشت داده آماری به ترتیب ۱۰ و ۴ باشد، در صورتی که داده‌های ۸ و ۱۲ به داده‌های فوق اضافه شود، واریانس داده‌های جدید کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲/۸ (۳)

۱۳/۲ (۲)

۱۳/۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\sigma = 4 \Rightarrow \sigma^2 = 16$$

$$16 = \frac{(x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2 + \dots + (x_8 - 10)^2}{8} \Rightarrow$$

$$(x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2 + \dots + (x_8 - 10)^2 = 128$$

حال واریانس داده‌های جدید را محاسبه می‌کنیم.

$$\sigma'^2 = \frac{(x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2 + \dots + (x_8 - 10)^2 + (12 - 10)^2 + (8 - 10)^2}{10}$$

$$\Rightarrow \sigma'^2 = \frac{128 + 4 + 4}{10} = 13/5$$

دقت کنید میانگین داده‌های اضافه شده با میانگین داده‌های اولیه برابر است، بنابراین میانگین داده‌ها تغییر نکرده است.

۵- اگر میانگین داده‌های x_1, x_2, x_3, x_4 با میانگین داده‌های $y_1, y_2, \dots, y_6$ برابر و واریانس آنها به ترتیب ۷ و ۵ باشد، واریانس کل ده داده چقدر است؟

۵/۵ (۴)

۶/۲ (۳)

۵/۸ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2}{4} \Rightarrow 7 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2}{4} \Rightarrow \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 = 28$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2}{6} \Rightarrow 5 = \frac{\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2}{6} \Rightarrow \sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2 = 30$$

بنابراین:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2}{4 + 6} = \frac{28 + 30}{10} = 5.8$$

روش دوم:

$$\sigma^2 = \frac{4 \times \sigma_x^2 + 6 \times \sigma_y^2}{4 + 6} = \frac{28 + 30}{10} = 5.8$$

۶- انحراف معیار داده‌های بزرگتر از چارک اول و کوچکتر از چارک سوم داده‌های ۱۴ و ۱۵ و ۱۳ و ۲۰ و ۲ و ۵ و ۱۷ و ۱۱ و ۱۹ کدام است؟

۲ (۴)

۴ (۳)

 $\sqrt{5}$ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴



ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۲ و ۵ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۷ و ۱۹ و ۲۰

میانه یا همان چارک دوم عددی است که نیمی از داده‌ها از آن کوچکتر و نیمی از آن بزرگتر باشند که اگر تعداد داده‌ها فرد باشد میانه داده وسطی است و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه میانه‌گین دو داده وسطی است. در این مثال که تعداد داده‌ها فرد است، میانه برابر داده پنجم یعنی ۱۴ است و چارک اول میانه قسمت اول داده‌ها یعنی ۱۳ و ۵ و ۲ است. بنابراین $Q_1 = \frac{5+11}{2} = 8$ و چارک سوم میانه قسمت دوم داده‌ها یعنی ۱۹ و ۱۷ و ۱۵ است. بنابراین $Q_3 = \frac{17+19}{2} = 18$. خلاصه اعداد ۱۲ و ۱۵ و ۱۴ و ۱۳ و ۱۱ بین Q_1 و Q_3 قرار دارند. برای محاسبه راحت‌تر می‌توانیم عدد ثابتی (عموماً میانه) را از داده‌ها کم کنیم و واریانس داده‌های حاصل را به دست آوریم:

x_i	۱۱	۱۳	۱۴	۱۵	۱۷	
$y_i = x_i - 14$	-۳	-۱	۰	۱	۳	$\bar{y} = 0$
$(y_i - \bar{y})^2$	۹	۱	۰	۱	۹	

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}{5} = \frac{9+1+0+1+9}{5} = 4 \Rightarrow \sigma = 2$$

راستی دقت کنید، اگر ضریب تغییرات را بخواهیم، کافیه انحراف معیار را به میانگین تقسیم کنید، مثلاً در این مسئله $CV = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$. دقت کنید برای به دست آوردن تعداد داده‌های بین چارک اول و سوم اگر داده‌ها متمایز باشند و داده‌های تکراری نداشته باشیم، نکات زیر برقرار است:

داده‌ها توسط چارک اول Q_1 و چارک دوم (همان میانه) Q_2 و چارک سوم Q_3 به ۴ قسمت تقسیم می‌شوند که تعداد داده‌های هر قسمت برابر است.

تعداد داده	تعداد	Q_1	تعداد	Q_2	تعداد	Q_3	تعداد
$4n$	n	$\frac{x_n + x_{n+1}}{2}$	n	$\frac{x_{2n} + x_{2n+1}}{2}$	n	$\frac{x_{3n} + x_{3n+1}}{2}$	n
$4n+1$	n	$\frac{x_n + x_{n+1}}{2}$	n	x_{2n+1}	n	$\frac{x_{3n+1} + x_{3n+2}}{2}$	n
$4n+2$	n	x_{n+1}	n	$\frac{x_{2n+1} + x_{2n+2}}{2}$	n	x_{3n+2}	n
$4n+3$	n	x_{n+1}	n	x_{2n+2}	n	x_{3n+3}	n

مثال:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} 3 \quad 5 \quad 11 \quad 17 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 3 \quad 5 \quad 11 \quad 17 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \end{array} \quad Q_1 = \frac{3+5}{2} = 4, \quad Q_2 = \frac{5+11}{2} = 8, \quad Q_3 = \frac{11+17}{2} = 14 \\ \\ \begin{array}{c} 3 \quad 5 \quad 11 \quad 17 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 3 \quad 5 \quad 11 \quad 17 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \end{array} \quad Q_1 = \frac{3+5}{2} = 4, \quad Q_2 = 9, \quad Q_3 = \frac{11+17}{2} = 14 \\ \\ \begin{array}{c} 3 \quad 5 \quad 11 \quad 17 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 3 \quad 5 \quad 11 \quad 17 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \end{array} \quad Q_1 = 4, \quad Q_2 = \frac{5+11}{2} = 8, \quad Q_3 = 15 \\ \\ \begin{array}{c} 3 \quad 5 \quad 11 \quad 17 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 3 \quad 5 \quad 11 \quad 17 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \end{array} \quad Q_1 = 4, \quad Q_2 = 9, \quad Q_3 = 15 \end{array}$$



با توجه به نکته فوق چون تعداد داده‌ها در این مثال ۹ عدد بود ($4 \times 2 + 1 = 9$) بنابراین کافی بود دو داده از اول و دو داده از آخر حذف کنیم تا داده‌های بین Q_1 و Q_3 را به دست آوریم.

(۲.۵, ۱۱, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۰)
داده‌های بین Q_1 و Q_3

۷- اگر داده‌های آماری متمایز باشند، تعداد آنها برابر کدام گزینه باشد تا چارک اول و سوم جزء داده‌ها باشند ولی چارک دوم جزء داده‌ها نباشد؟

@Doping_Maze | @BioMazeFree

۴۳ (۴)

۴۲ (۳)

۴۱ (۲)

۴۰ (۱)

➤ پاسخ: گزینه ۳

اگر داده‌ها متمایز باشند (داده تکراری نداشته باشیم) در صورتی تعداد داده‌ها $4n + 2$ باشد، چارک اول و سوم جزء داده‌ها هستند ولی چارک دوم جزء داده‌ها نیست.

۸- اگر میانگین داده‌های $2x_i - 1$ برابر ۵ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $3x_i + 1$ چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

۲ (۴)

۰/۵ (۳)

۰/۷۵ (۲)

۰/۲۵ (۱)

➤ پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این که ضریب تغییرات برابر خارج قسمت تقسیم انحراف معیار بر میانگین است، ضریب تغییرات داده‌های $2x_i - 1$ برابر $\frac{\sigma}{5}$ است.

از طرفی با توجه به تغییر داده‌ها به $3x_i + 1$ ، برای به دست آوردن میانگین جدید به این صورت عمل می‌کنیم.

$$(2\bar{x} - 1) = 5 \Rightarrow (\bar{x} = 3) \text{ و با قرار دادن } \bar{x} = 3 \text{ در } (3\bar{x} + 1) \text{ میانگین جدید یعنی عدد ده به دست می‌آید.}$$

و همین‌طور با توجه به این که تنها ضریب عددی در انحراف معیار تأثیر دارد نه جمع و منها، بنابراین انحراف معیار جدید $\frac{3}{4}$ انحراف معیار

قبلی است (زیرا $2x_i$ برای تبدیل به $3x_i$ در $\frac{3}{4}$ ضرب شده) بنابراین:

$$CV_2 = \frac{\frac{3}{4}\sigma}{\frac{3}{4}\bar{x}} = \frac{3\sigma}{3\bar{x}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$\frac{CV_2}{CV_1} = \frac{\frac{3\sigma}{3\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

۹- میانگین و واریانس نمرات مهارت کارگر A به ترتیب ۸ و ۱۶ و میانگین و واریانس نمرات مهارت کارگر B به ترتیب ۶ و ۹ می‌باشد، دقت عمل کدام بیشتر است؟

۴ (نمی‌توان نظر داد)

۳ (یکسان است)

B (۲)

A (۱)

➤ پاسخ: گزینه ۳

باید ضریب تغییرات نمرات مهارت دو کارگر را مقایسه کنیم:

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad CV_B = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

بنابراین دقت عمل هر دو یکسان است.

$$\sigma_B^2 = 9 \Rightarrow \sigma_B = 3 \text{ و } \sigma_A^2 = 16 \Rightarrow \sigma_A = 4$$

دقت کنید: $\sigma_B^2 = 9 \Rightarrow \sigma_B = 3$ و $\sigma_A^2 = 16 \Rightarrow \sigma_A = 4$



۱۰- اشخاص a, b, c, d, e, f در یک صف ایستاده‌اند. در چند حالت، شخص a قبل از شخص d (نه لزوماً بلافاصله بعد از آن) ایستاده است؟

۲۴۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۳۶۰ (۲)

۶۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

کل حالاتی که n نفر در صف قرار می‌گیرند n! است. از طرفی احتمال این که شخص a قبل از d قرار گیرد $\frac{1}{2}$ است و $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ بنابراین:

$$n(A) = \frac{1}{2} n(S) = \frac{1}{2} \times 6! = 360$$

دقت کنید یا a قبل از d است و یا d قبل از a است.

۱۱- ۳ دانش آموز تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی به چند طریق می‌توانند یک در میان در صف قرار بگیرند؟

۷۲ (۴)

۲۴ (۳)

۱۲ (۲)

۳۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

در ابتدا یا یک دانش آموز ریاضی می‌ایستد یا یک دانش آموز تجربی و ایستادن ۳ دانش آموز! حالت دارد پس کل حالات برابر:

$$2 \times 3! \times 3! = 72$$

تعداد حالات ایستادن ریاضی‌ها

تعداد حالات ایستادن تجربی‌ها

دقت کنید تعداد حالات چیدن دو دسته n تایی به‌طور یک در میان برابر $2 \times n! \times n!$

و تعداد حالات چیدن یک دسته (n+1) تایی و یک دسته n تایی به‌طور یک در میان برابر $n! \times (n+1)!$ است.

۱۲- در یک اردوگاه ۵ مدرسه حضور دارند که هر مدرسه ۴ دانش آموز خود را آورده است. اگر بخواهیم ۳ نفر انتخاب کنیم که دوبه‌دو هم‌مدرسه‌ای نباشند به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

۶۴۰ (۴)

۳۲۰ (۳)

۲۴۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ۳ مدرسه از ۵ مدرسه انتخاب می‌کنیم، سپس از هر مدرسه یک نفر را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{5}{3} \binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 640$$

۱۳- از بین ۴ مرد و ۳ زن به چند طریق می‌توان سه نفر را انتخاب کرد به‌طوری که حداقل شامل ۱ زن باشد.

۱۸ (۴)

۳۱ (۳)

۱۲ (۲)

۳۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

برای حل می‌توانیم کل حالاتی که ۳ نفر را از بین ۷ نفر می‌توان انتخاب کرد را به‌دست آورد، سپس حالت‌هایی که هیچ زنی بین ۳ نفر وجود ندارد را از آن کم کرد.

$$\binom{7}{3} - \binom{3}{3} \binom{4}{0} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} - 4 = 31$$



۱۴- به چند طریق از مجموعه $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ یک زیر مجموعه ۴ عضوی می توان انتخاب کرد به طوری که حداکثر یکی از دو عضو a یا b در آن باشد.

۱۰ (۴)

۲۰ (۳)

۲۵ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 10 + 10 + 5 = 25$$

تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی که شامل a باشد و شامل b نباشد:

$$\{a, b, c, d, e, f, g\} \quad \binom{5}{3}$$

Ⓐ ○ ○ ○ ○

مشابه آن تعداد زیر مجموعه هایی که شامل b باشد و شامل a نباشد نیز $\binom{5}{3} = 10$ است.

و تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی که شامل a و b نباشد، برابر $\binom{5}{4} = 5$

$$\{a, b, c, d, e, f, g\}$$

○ ○ ○ ○

روش دوم: تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی که شامل a و b هستند را از تعداد کل زیر مجموعه های ۴ عضوی کم کنیم.

$$\binom{7}{4} - \binom{5}{2} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2} - 10 = 35 - 10 = 25$$

$$\{a, b, c, d, e, f, g\}$$

Ⓐ Ⓑ ○ ○

۱۵- تعداد چند ضلعی هایی که با ۸ نقطه روی دایره می توان ساخت کدام است؟

۲۱۹ (۴)

۲۲۰ (۳)

۲۴۷ (۲)

۲۲۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

تعداد سه ضلعی ها $\binom{8}{3}$ و تعداد چهار ضلعی ها $\binom{8}{4}$ و به همین ترتیب تا تعداد هشت ضلعی ها که $\binom{8}{8}$ است، یعنی:

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \dots + \binom{8}{8}$$

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \dots + \binom{8}{8} = 2^8$$

از طرفی:

بنابراین:

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \dots + \binom{8}{8} = 2^8 - \binom{8}{0} - \binom{8}{1} - \binom{8}{2} = 256 - 1 - 8 - 28 = 219$$

۱۶- از بین ۴ داوطلب گروه ریاضی و ۵ داوطلب گروه تجربی به طور تصادفی ۴ داوطلب انتخاب می شود. با کدام احتمال دو نفر از گروه ریاضی هستند؟

 $\frac{10}{21}$ (۴) $\frac{5}{21}$ (۳) $\frac{5}{7}$ (۲) $\frac{11}{21}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پیشامد: دو دانش آموز ریاضی و دو دانش آموز تجربی

$$\frac{\binom{4}{2} \binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{6 \times 10}{9 \times 8 \times 7 \times 6 / 4 \times 3 \times 2} = \frac{10}{21}$$

فضای نمونه‌ای: چهار دانش آموز از ۹ دانش آموز

۱۷- ۶ نفر برای استخدام مراجعه کرده‌اند، اگر بخواهیم ۴ نفر را استخدام کنیم، با کدام احتمال فرد a استخدام می‌شود به شرطی که بدانیم فرد b استخدام شده است؟

(۱) ۵/۰ (۲) ۴/۰ (۳) ۳/۰ (۴) ۶/۰

پاسخ: گزینه ۴

اگر پیشامد A، استخدام فرد a باشد و پیشامد B، استخدام فرد b باشد، می‌خواهیم $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ را به دست آوریم، از

طرفی: $P(B) = \binom{5}{3}$ (b استخدام شده، پس سه نفر را می‌توانیم از بین ۵ نفر باقی‌مانده انتخاب کنیم).

$P(A \cap B) = \binom{4}{2}$ (a و b استخدام شده‌اند، پس دو نفر دیگر را می‌توانیم از بین ۴ نفر باقی‌مانده انتخاب کنیم).

$$P(A|B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}$$

بنابراین:

۱۸- ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک را در یک قفسه چیده‌ایم، چقدر احتمال دارد کتاب‌های هم موضوع را کنار هم چیده باشیم؟

(۱) ۲/۳۵ (۲) ۲/۷ (۳) ۴/۳۵ (۴) ۳/۷

پاسخ: گزینه ۱

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر تعداد حالت‌های چیدن هفت شیء یعنی ۷! است.

حالا اگر کتاب‌های ریاضی و فیزیک را هر کدام یک بسته در نظر بگیریم، تعداد حالات چیدن آنها برابر:

چیدمان درون بسته ریاضی $\rightarrow 2! \times 3! \times 4!$ چیدمان بسته‌ها

بنابراین:

$$P(A) = \frac{2! \times 3! \times 4!}{7!} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6 \times 7} = \frac{2}{35}$$

۱۹- در یک جامعه ۷۰٪ روزنامه A را مطالعه می‌کنند و ۴۰٪ روزنامه B را مطالعه می‌کنند و ۳۰٪ هم روزنامه A و هم روزنامه B را مطالعه می‌کنند، با انتخاب یک فرد به‌طور تصادفی با چه احتمالی نه روزنامه A را مطالعه می‌کند و نه روزنامه B را مطالعه می‌کند؟

(۱) ۳۰٪ (۲) ۱۰٪ (۳) ۲۰٪ (۴) ۴۰٪

پاسخ: گزینه ۳



روش اول:

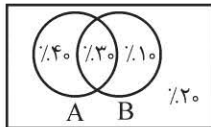
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.70 + 0.40 - 0.30 = 0.80$$

یعنی ۸۰٪ یا روزنامه A را مطالعه می کنند یا روزنامه B را، بنابراین (متمم آن) ۲۰٪ نه روزنامه A را مطالعه می کنند و نه روزنامه B را.

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

روش دوم: از اشتراک شروع می کنیم و A و B را می سازیم. سپس هر چه باقی ماند تا ۱۰۰٪ شود، بیرون A و B می گذاریم.



@Doping_Maze | @BioMazeFree

۲۰- اگر $P(A) = 0.2$ و $P(B|A') = 0.4$ باشد، $P(A \cup B)$ کدام است؟

۰/۴ (۴)

۰/۴۸ (۳)

۰/۶ (۲)

۰/۵۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

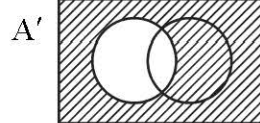
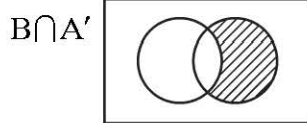
$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = 0.4 \Rightarrow P(B \cap A') = 0.32$$

$$P(A) = 0.2 \Rightarrow P(A') = 0.8$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A') = 0.52$$

از طرفی:

دقت کنید:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A') = P(A) + P(B - A)$$

بنابراین:

البته در حالت کلی داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) = 1 - P(A' \cap B')$$

۲۱- احتمال این که فردی به بیماری های A و B مبتلا شود به ترتیب $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{3}$ است. اگر او بیماری B را داشته باشد با احتمال $\frac{1}{4}$ به بیماری A مبتلا می شود. احتمال این که این فرد حداقل به یکی از بیماری های A یا B مبتلا شود، چقدر است؟

۰/۳۵ (۴)

۰/۵ (۳)

۰/۴۵ (۲)

۰/۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

حداقل به یکی از بیماری های A یا B مبتلا شود یعنی $A \cup B$. از طرفی:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{8}{15} - \frac{1}{12} = \frac{32-5}{60} = \frac{27}{60} = \frac{9}{20} = \frac{45}{100}$$

9



۲۲- یک خانواده شش نفره دور یک میز گرد نشسته‌اند، چقدر احتمال دارد که مادر و پدر کنار هم نشسته باشند؟

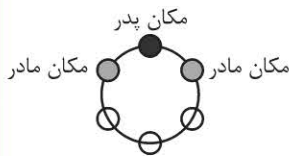
$$\frac{1}{3} (۴)$$

$$\frac{2}{5} (۳)$$

$$\frac{1}{6} (۲)$$

$$\frac{1}{5} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳



فرض کنید ابتدا پدر نشسته باشد، حال برای مادر ۵ مکان نشستن وجود دارد (تعداد اعضای فضای نمونه‌ای) و ما در نظر داریم مادر کنار پدر بنشیند یعنی دو انتخاب یا سمت چپ و یا سمت راست پدر (تعداد اعضای پیشامد) بنابراین احتمال $\frac{2}{5}$ است.

۲۳- سکه‌ای را ۶ بار پرتاب می‌کنیم، چقدر احتمال دارد تعداد روها بیشتر از پشت‌ها باشد؟

$$\frac{5}{32} (۴)$$

$$\frac{11}{32} (۳)$$

$$\frac{5}{16} (۲)$$

$$\frac{11}{16} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

سه حالت ممکن است رخ دهد که دو حالت آن هم شانس است. یا تعداد روها بیشتر است یا تعداد پشت‌ها و یا تعداد آنها برابر است که دو حالت اول هم شانس هستند، پس کافی است احتمال حالت تساوی را به دست آورد از یک کم کنیم و بر دو تقسیم کنیم زیرا اگر احتمال رو بیشتر و پشت بیشتر را p بنامیم و احتمال حالت تساوی را q بنامیم، داریم:

$$2p + q = 1$$

$$p = \frac{1-q}{2}$$

$$q = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

$$p = \frac{11}{32}$$

پس:

از طرفی:

پس:

دقت کنید، اگر تعداد سکه‌ها فرد بود، جواب $\frac{1}{2}$ می‌شد، زیرا احتمال حالت تساوی صفر بود.

در ضمن از این روش در مسائل مشابه نیز می‌توان استفاده کرد. مثلاً:

در پرتاب یک تاس قرمز و یک تاس آبی چقدر احتمال دارد که تاس قرمز عدد بزرگتری را نشان دهد؟

$$q = \frac{1}{6} \Rightarrow p = \frac{1 - \frac{1}{6}}{2} = \frac{5}{12}$$

۲۴- در پرتاب دو تاس اگر مجموع دو تاس بزرگتر از ۸ ظاهر شده باشد، با چه احتمالی هر دو تاس زوج ظاهر می‌شود؟

$$0/3 (۴)$$

$$0/5 (۳)$$

$$0/2 (۲)$$

$$0/4 (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

اگر پیشامد مجموع دو تاس بزرگتر از ۸ ظاهر شود را B بنامیم و پیشامد هر دو تاس زوج ظاهر شود را A ، به دنبال $P(A|B)$ هستیم. از طرفی:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

همین‌طور:

$$B = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$A \cap B = \{(4, 6), (6, 4), (6, 6)\}$$



$$P(A|B) = 0/3$$

بنابراین:

دقت کنید، در پرتاب دو تاس یک تقارن وجود دارد، این به این دلیل است که مجموع پشت و روی یک تاس برابر ۷ می‌شود. در واقع در پرتاب دو تاس جدول زیر را داریم:

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱
حالت‌ها	(۱, ۱)	(۱, ۲) (۲, ۱)	(۱, ۳) (۲, ۲) (۳, ۱)	(۱, ۴) (۲, ۳) (۳, ۲) (۴, ۱)	(۱, ۵) (۲, ۴) (۳, ۳) (۴, ۲) (۵, ۱)	(۱, ۶) (۲, ۵) (۳, ۴) (۴, ۳) (۵, ۲) (۶, ۱)	(۶, ۲) (۵, ۳) (۴, ۴) (۳, ۵) (۲, ۶)	(۶, ۳) (۵, ۴) (۴, ۵) (۳, ۶)	(۶, ۴) (۵, ۵) (۴, ۶)	(۶, ۵) (۵, ۶)	(۶, ۶)

همان طور که می‌بینید در پرتاب دو تاس تعداد حالات مجموع برابر ۵ با تعداد حالات مجموع برابر ۹ یکسان است زیرا $(۵+۹=۱۴)$. همین‌طور تعداد حالات مجموع برابر ۴ با تعداد حالات مجموع برابر ۱۰ و ... مثال: در پرتاب دو تاس احتمال این که مجموع: الف) مضرب ۴ باشد.

$$۴ \text{ مضرب } = \{۴, ۸, ۱۲\} \Rightarrow \text{تعداد حالات} = ۳ + ۵ + ۱ = ۹$$

$$P = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

ب) مضرب ۵ باشد.

$$۵ \text{ مضرب } = \{۵, ۱۰\} \Rightarrow \text{تعداد حالات} = ۴ + ۳ = ۷$$

$$P = \frac{۷}{۳۶}$$

۲۵- احتمال قبولی علی و حسن در درس ریاضی به ترتیب $0/7$ و $0/8$ است. احتمال این که فقط یکی از آنها در این آزمون قبول شود، چقدر است؟

$$0/۶۲ \text{ (۴)}$$

$$0/۵۶ \text{ (۳)}$$

$$0/۳۸ \text{ (۲)}$$

$$0/۴۴ \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۲

دو پیشامد مستقل هستند. اگر فرض کنیم احتمال قبولی علی برابر $P(A)$ و احتمال قبولی حسن برابر $P(B)$ باشد $P(B) = 0/8$ و $P(A) = 0/7$ ، احتمال این که فقط یکی از آنها قبول شود برابر است با:

$$P(A-B) + P(B-A) = P(A \cap B') + P(B \cap A')$$

$$P(A) \times P(B') + P(B) \times P(A') = 0/7 \times 0/2 + 0/8 \times 0/3 = 0/38$$

یعنی یا علی قبول شود و حسن نشود یا حسن قبول شود و علی نشود.

۲۶- سارا به احتمال $\frac{1}{5}$ در آزمون ورودی مدرسه A قبول می‌شود و به احتمال $\frac{1}{6}$ در آزمون ورودی مدرسه B قبول می‌شود. احتمال قبولی سارا فقط در یک آزمون چند برابر احتمال قبولی او در حداقل یک آزمون است؟

$$0/۱ \text{ (۴)}$$

$$0/۹ \text{ (۳)}$$

$$0/۴ \text{ (۲)}$$

$$0/۳ \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۳



اگر احتمال قبولی در آزمون مدرسه A را با $P(A)$ و احتمال قبولی در آزمون ورودی مدرسه B را با $P(B)$ نمایش دهیم، بنابراین:

احتمال قبولی سارا فقط در یک آزمون $P(A-B)+P(B-A)=$

$$P(A \cap B') + P(B \cap A') = P(A) \times P(B') + P(B) \times P(A') = \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

دقت کنید مفهوم قبولی سارا فقط در یک آزمون این است که در آزمون A قبول شود و در B نشود یا در B قبول شود و در A نشود. و مفهوم قبولی سارا در حداقل یک آزمون یعنی یا در A قبول شود و در B نشود یا در B قبول شود و در A نشود یا در هر دو قبول شود که متمم آن این است که در هر دو قبول نشود، یعنی:

$$1 - P(A' \cap B') = P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(B \cap A') + P(A \cap B)$$

از طرفی چون A و B مستقل اند (قبولی در مدرسه A ارتباطی به قبولی در مدرسه B ندارد)، تمامی اشتراکها به ضرب تبدیل می شود. بنابراین احتمال قبولی سارا در حداقل یک آزمون برابر است با:

$$1 - P(A' \cap B') = 1 - P(A') \times P(B') = 1 - \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

در نتیجه نسبت احتمال قبولی سارا فقط در یک آزمون به احتمال قبولی او در حداقل یک آزمون برابر $\frac{1}{3} \div \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ است.

۲۷- در یک کارخانه سی درصد محصولات را دستگاه A و هفتاد درصد را دستگاه B تولید می کند. اگر دو درصد محصولات A و ده درصد محصولات B معیوب باشند، در صورت انتخاب یکی از محصولات این کارخانه، با چه احتمالی معیوب است؟

(۱) $\frac{1}{13}$ (۲) $\frac{7}{26}$ (۳) $\frac{4}{13}$ (۴) $\frac{1}{13}$

پاسخ: گزینه ۲

اگر قرار است محصولی معیوب باشد، یا دستگاه A آن را تولید کرده و معیوب است، یا دستگاه B آن را تولید کرده و معیوب است. بنابراین:

$$\text{احتمال معیوب بودن} = \frac{3}{10} \times \frac{2}{100} + \frac{7}{10} \times \frac{10}{100} = \frac{77}{100} = 0.77$$

دقت کنید اگر احتمال معیوب بودن را $P(C)$ بنامیم:

$$P(C) = P(A) \times P(C|A) + P(B) \times P(C|B)$$

۲۸- در یک شرکت تعداد کارمندان زن دو برابر کارمندان مرد است. اگر ۶۰٪ کارمندان زن و ۸۰٪ کارمندان مرد بیمه شده باشند، با انتخاب یک فرد در این شرکت، وی با چه احتمالی بیمه شده است؟

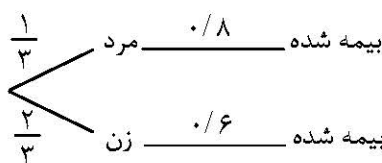
(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

اگر تعداد کارمندان مرد را n در نظر بگیریم، تعداد کارمندان زن ۲n می باشد. بنابراین تعداد کل کارمندان شرکت ۳n می باشد و احتمال

این که یک کارمند زن باشد، $\frac{2}{3}$ و احتمال این که مرد باشد، $\frac{1}{3}$ است، بنابراین فرض می کنیم:

فرد انتخاب شده یا مرد است و بیمه شده و یا زن است و بیمه شده و احتمال آن برابر است با:



$$\frac{6}{10} \times \frac{2}{3} + \frac{8}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

مرد بودن $\rightarrow$ بیمه به شرط زن بودن
 زن بودن $\rightarrow$ بیمه به شرط مرد بودن



۲۹- علی به احتمال ۳۰٪ در رشته ریاضی و به احتمال ۵۰٪ در رشته تجربی و به احتمال ۲۰٪ در رشته انسانی ادامه تحصیل می‌دهد. اگر احتمال قبولی او در کنکور ریاضی و کنکور تجربی و کنکور انسانی به ترتیب ۴۰٪ و ۲۰٪ و ۵۰٪ باشد، علی با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته می‌شود؟

۰/۲۲ (۴)

۰/۴۲ (۳)

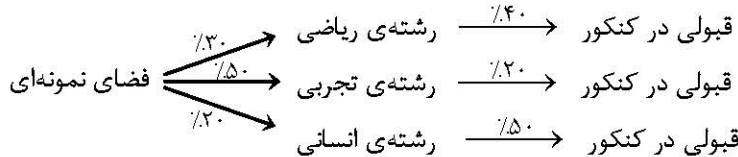
۰/۳۲ (۲)

۰/۱۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

علی یا به رشته ریاضی می‌رود و در کنکور قبول می‌شود یا به رشته تجربی می‌رود و در کنکور قبول می‌شود یا به رشته انسانی می‌رود و در کنکور قبول می‌شود:

$$0.30 \times 0.40 + 0.50 \times 0.20 + 0.20 \times 0.50 = 0.32$$



۳۰- در یک شرکت ۶۰٪ کارکنان زن و بقیه مرد هستند. اگر ۷۰٪ زنان و ۵۰٪ مردان تحصیل کرده باشند، با انتخاب یک فرد از این شرکت اگر بدانیم تحصیل کرده است، با چه احتمالی زن است؟

$\frac{5}{7}$ (۴)

$\frac{21}{31}$ (۳)

$\frac{7}{12}$ (۲)

$\frac{6}{7}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

روش اول: پیشامد زن بودن را A و پیشامد تحصیل کرده بودن را B می‌نامیم. هدف یافتن $P(A|B)$ است، از طرفی داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) = P(A) \times P(B|A) + P(A') \times P(B|A')$$

یعنی فرد باسواد، یا مرد است و باسواد یا زن است و باسواد، بنابراین:

$$P(B) = 0.6 \times 0.7 + 0.4 \times 0.5 = 0.62$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$$

و

$$P(A|B) = \frac{0.42}{0.62} = \frac{42}{62} = \frac{21}{31}$$

پس:

روش دوم: یک جدول بکشید و فرض کنید از جمعیت یک شرکت صد نفره باید شصت نفر زن و چهل نفر مرد باشند و هفتاد درصد شصت نفر یعنی چهل و دو نفر از زن‌ها تحصیل کرده و بقیه بی‌سواد باشند و پنجاه درصد چهل نفر یعنی بیست نفر از مردها تحصیل کرده و بقیه بی‌سواد باشند.

	مرد	زن
تحصیل کرده	۲۰	۴۲
بی‌سواد	۲۰	۱۸

اگر یاد بگیری این جدول رو بکشی کارت راحت‌تر. حالا فضای نمونه‌ای جدیدت کل تحصیل کرده‌ها هستند که ۶۲ نفر هستند و ۴۲ نفر آنها زن

$$\frac{42}{62} = \frac{21}{31}$$

پس جواب:

